

Πίνακες μεταβολών συναρτήσεων με το tkz-tab

Τάσσος Δήμου

Πελοπίδα 26

181 20 Κορυδαλλός

Αττική

URL: <https://tassosdimou.gr>

H/T: tassosdimou at gmail dot com

Στην εργασία αυτή, παρουσιάζεται αναλυτικά η χρήση του πακέτου tkz-tab για τη δημιουργία καλαίσθητων πινάκων μεταβολής συναρτήσεων και προσήμων. Το tkz-tab στηρίζεται στο σχεδιαστικό πακέτο TikZ, του οποίου χρησιμοποιούνται πολλές εντολές. Εδώ, η χρήση του tkz-tab εξηγείται αποφεύγοντας τις πολύπλοκες εντολές του TikZ μέσω κατατοπιστικών παραδειγμάτων.

Tables of function signs and variations using tkz-tab, by Tassos Dimou — In this article, we present how one can use the package tkz-tab to produce beautiful tables of function signs and variations. The package tkz-tab is an extension of the drawing package TikZ, of which several commands are taken. Herein, the use of tkz-tab is explained by several introductory examples, thus avoiding the complicated commands of TikZ.

Εισαγωγικά

Το πακέτο tkz-tab [1] αποτελεί συμπλήρωμα στο μεγάλο σχεδιαστικό πακέτο PGF-TikZ. Πρόκειται για μια δημιουργία του Alain Matthes, με την οποία μπορούμε να σχεδιάσουμε, σχετικά εύκολα, πίνακες μεταβολών διαφόρων συναρτήσεων.

Για να φορτώσουμε το πακέτο tkz-tab, στο προοίμιο του αρχείου μας $\text{\LaTeX}$ πρέπει να βάλουμε την εντολή: `\usepackage{tkz-tab}`. Κατόπιν, για να αρχίσουμε την κατασκευή ενός πίνακα, ακολουθούμε τη δομή:

```
\begin{tikzpicture}
περιεχόμενα...
\end{tikzpicture}
```

Αμέσως μετά προσθέτουμε τις εντολές που προσδιορίζουν το στίλ, τις γραμμές, το πάχος, τα χρώματα και το είδος βελών. Όλα αυτά εισάγονται με την εντολή `\tikzset{...}`.

Εδώ παρουσιάζουμε μερικές μορφοποιήσεις που καλύπτουν κυρίως σχολικές ανάγκες. Οι βασικές εντολές του πακέτου `tkz-tab` είναι οι ακόλουθες:

```
\tikzset{}
\tkzTabInit[]{}{}
\tkzTabLine{}
\tkzTabVar{}
\tkzTabVal{}{}{}{}
```

Η εντολή `\tikzset`

Στην `\tikzset{}` ορίζουμε παραμέτρους που καθορίζουν τη μορφή, το πάχος, το χρώμα των γραμμών ή τη μορφή των βελών. Μερικές βασικές χρήσεις της θα τις συναντήσουμε παρακάτω στα παραδείγματα. Εδώ θα αναφερθούμε σε μερικά σημαντικά στοιχεία της.

- `\tikzset{t style/.style = {style = dashed}}`
Η παράμετρος `t style/.style` ορίζει τη μορφή των κατακόρυφων διαχωριστικών γραμμών μέσα στον πίνακα. Με `{style = dashed}`, λαμβάνουμε γραμμές με διακεκομμένες παύλες. Με `{style = dotted}`, ορίζουμε γραμμές διακεκομμένες με τελείες, ενώ με `{style = densely dashed}`, ορίζουμε γραμμές διακεκομμένες με πυκνές παύλες.
- `\tikzset{h style/.style = {fill=red!40}}`
Η παράμετρος `h style/.style` ορίζει το πώς γεμίζει η περιοχή `h` στον πίνακα. Με `{fill=red!40}`, η περιοχή `h` θα γεμίσει με κόκκινο χρώμα. Αν όμωςβάλουμε `{pattern=north west lines}`, η περιοχή `h` θα γραμμοσκιαστεί.
- `\tikzset{arrow style/.style = {blue,>->,> = latex', % shorten >= 6pt, shorten <= 6pt}}`
Με την παράμετρο `arrow style/.style` ορίζουμε το χρώμα και τη μορφή του βέλους. Το `blue`, σημαίνει γαλάζιο χρώμα, ενώ το `>->` ρυθμίζει τη μορφή του βέλους. Η παράμετρος `shorten >=` μειώνει την απόσταση του τελικού σημείου κατά 6 pt ενώ η `shorten <=` κάνει το ίδιο με το αρχικό σημείο.

Παρακάτω δίνονται δύο πλήρη παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

```
1 \begin{center}
2 \begin{tikzpicture}
```

Πίνακες μεταβολών συναρτήσεων με το *tkz-tab*

17

```

3 \tikzset{h style/.style = {fill=red!40}}
4 \tkzTabInit[espcl=2,lgt=2]
5   {$x$/1,$f'(x)$/1}
6   {$-\infty$,$-2$,$2$,$+\infty$}
7   \tkzTabLine{ d , - , z , h , z , + , d }
8   \end{tikzpicture}
9 \end{center}

```

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+

Παράδειγμα 2

```

1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     [line width=1pt]
4     \tikzset{arrow style/.style =
5       {blue,>->,>= latex',
6       shorten >= 6pt,
7       shorten <= 6pt}}
8     \tkzTabInit[espcl=2,lgt=1]
9       {$x$/1,$f'(x)$/1,$f(x)$/1.5}
10      {$-\infty$,$-2$,$0$,$2$,$+\infty$}
11      \tkzTabLine{ , - , t , + , t , + , z , - , d }
12      \tkzTabVar{+/-,-/ ,+V-/,+/- , -/}
13    \end{tikzpicture}
14  \end{center}

```

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	0	-
$f(x)$					

Η παράμετρος [line width = 1pt] ορίζει το πάχος της γραμμής. Θα συμβουλευάμε, στις γραμμές 2-6 του παραπάνω κώδικα, να πειράζουμε μόνο το πάχος της

γραμμής (`[line width=<αριθμός>]`), το χρώμα (black, blue, red, κ.λπ.) ή τη μορφή του βέλους (`>->` ή `->`).

Η εντολή `\tkzTabInit`

Η εντολή `\tkzTabInit[]{}{}` δέχεται κάποιες παραμέτρους και δύο ορίσματα. Στις αγκύλες `[]` μπορούμε να ορίσουμε *προαιρετικά* τις τιμές των παραμέτρων `lgt` και `esprcl`. Η παράμετρος `lgt` ορίζει το πλάτος, σε cm, της πρώτης στήλης του πίνακα στα αριστερά (βασική τιμή `lgt = 2 cm`). Η παράμετρος `esprcl` ορίζει το πλάτος, σε cm, των άλλων στηλών με τις τιμές του x (βασική τιμή `esprcl = 2 cm`). Υπάρχουν και άλλες παράμετροι, αλλά θα μείνουμε σε αυτές τις δύο.

Στο πρώτο όρισμα εντός αγκίστρων `{}`, γράφουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης, που καθορίζουν και πόσες γραμμές θα έχει ο πίνακάς μας. Στο δεύτερο όρισμα εντός αγκίστρων `{}`, γράφουμε τις τιμές του x , που καθορίζουν και τον αριθμό των στηλών του πίνακα.

Ο κώδικας για έναν απλό πίνακα με δύο γραμμές είναι:

$$\backslash tkzTabInit[]{\$x\$/0.8,\$f(x)\$/1}\{a,b\}$$

Και ορίστε το αποτέλεσμα:

x	a	b
$f(x)$		

Στο πρώτο όρισμα εντός αγκίστρων, καθορίζεται η πρώτη στήλη του πίνακα με τον κώδικα: $x(n)/d(n)$, όπου $x(n)$ είναι το στοιχείο της στήλης (π.χ. $\$x\$$ για το x , $\$f(x)\$$ για το $f(x)$, κ.λπ.) και $d(n)$ είναι ένας αριθμός που καθορίζει το ύψος, σε cm, της γραμμής του πίνακα που αντιστοιχεί στο στοιχείο $x(n)$. Για παράδειγμα, ας συγκρίνουμε τον προηγούμενο πίνακα με τον επόμενο, όπου αλλάξαμε το ύψος της πρώτης γραμμής από $/0.8$ (0,8 cm) σε $/1$ (1 cm), και το ύψος της δεύτερης γραμμής από $/1$ (1 cm) σε $/1.5$ (1,5 cm):

x	a	b
$f(x)$		

Παράδειγμα 3

Ας δούμε τώρα κάποια πιο πολύπλοκα παραδείγματα. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε πώς αντιμετωπίζουμε τα προβλήματα χώρου στις στήλες. Η σημασία των παραμέτρων είναι προφανής.

```

1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     \tkzTabInit[lgt=1,espc=1.5]
4       {$x$/1,$x^2-x$/1,$x^3-3x^2+2$/1}
5       {$0$, $1$, $\mathrm{e}$}
6   \end{tikzpicture}
7 \end{center}
```

x	0	1	e
$x^2 - x$			
$x^3 - 3x^2 + 2$			

Στο παραπάνω παράδειγμα, παρατηρούμε ότι στην πρώτη στήλη υπάρχει στενότητα χώρου. Ας κάνουμε κάποιες παρεμβάσεις. Αρχικά ας αυξήσουμε το ύψος των δύο κατωτέρων γραμμών του πίνακα αλλάζοντας τις τιμές /1 σε /1.25 (1,25 cm). Και για να αυξήσουμε το πλάτος της πρώτης στήλης, αλλάζουμε την τιμή του *lgt* σε 2.75 (2,75 cm).

```

1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     \tkzTabInit[lgt=2.75]
4       {$x$/1,$x^2-x$/1.25,$x^3-3x^2+2$/1.25}
5       {$0$, $1$, $\mathrm{e}$}
6   \end{tikzpicture}
7 \end{center}
```

x	0	1	e
$x^2 - x$			
$x^3 - 3x^2 + 2$			

Σύμβολο	Αποτέλεσμα
d	Διπλή γραμμή στα σημεία που δεν ορίζεται η συνάρτηση
t	Διακεκομμένη γραμμή
z	Διακεκομμένη γραμμή που στη μέση της έχει το μηδέν (0)

Πίνακας 1: Σύμβολα που μπαίνουν στις μονές θέσεις του ορίσματος της εντολής `\tkzTabLine`.

Σύμβολο	Αποτέλεσμα
h	Απαγορευμένη ζώνη (π.χ. όπου μια συνάρτηση δεν ορίζεται)
+	Θετικό πρόσημο (+)
-	Αρνητικό πρόσημο (-)

Πίνακας 2: Σύμβολα που μπαίνουν στις ζυγές θέσεις του ορίσματος της εντολής `\tkzTabLine`.

Παρατηρούμε ότι αυξήθηκε το πλάτος της πρώτης στήλης και ο πίνακας ήλθε σε μια αξιοπρεπή μορφή.

Η εντολή `\tkzTabLine`

Με την εντολή `\tkzTabLine[<τοπικές επιλογές>]{<s(1),...,s(n)>}`, ορίζουμε σύμβολα για τις διάφορες τιμές του x .

Στα μονά σύμβολα $s(n)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια από τις τιμές: z , t και d , των οποίων η σημασία δίνεται στον Πίνακα 1. Θυμηθείτε ότι μπορούμε να ορίσουμε τη μορφή της διακεκομμένης γραμμής με την εντολή

```
\tikzset{t style/.style = {style = dashed}},
```

όπως εξηγήσαμε στην πρώτη ενότητα του άρθρου.

Στα ζυγά σύμβολα $s(n)$, βάζουμε μια από τις τιμές: $+$, $-$ και h , των οποίων η σημασία δίνεται στον Πίνακα 2.

Τώρα ας δούμε πώς διαμορφώνεται η λίστα $s(1), \dots, s(n)$. Αν το δεύτερο όρισμα της εντολής `\tkzTabInit` έχει n στοιχεία, δηλαδή αν ο πίνακας έχει $n + 1$ στήλες (συμπεριλαμβανομένης και της πρώτης στήλης στα αριστερά), τότε η λίστα $s(1), \dots, s(n)$ θα έχει $2n$ στοιχεία και $2n - 1$ κόμματα.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4

```
1 \begin{tikzpicture}
2   \tikzset{t style/.style={style=dashed}}
3   \tkzTabInit[espcl=1.5]
4     {$x/1$, $f(x)/1$}
```

```

5   {\$v_1$, \$v_2$, \$v_3$}
6   \tkzTabLine{ t, , t, , t }
7   \end{tikzpicture}

```

x	v_1	v_2	v_3
$f(x)$			

Παρατηρούμε ότι έχουμε δημιουργήσει $2 \times 3 - 1 = 5$, θέσεις γιατί το δεύτερο όρισμα της εντολής `\tkzTabInit` είναι το $\{\$v_1$, \$v_2$, \$v_3\}$, που έχει 3 στοιχεία. Θα έχουμε λοιπόν $2 \times 3 - 2 = 4$ κόμματα.

Παράδειγμα 5

Στο επόμενο παράδειγμα θα κάνουμε έναν πίνακα προσήμων της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = x \ln x$.

Αν οι τιμές της μεταβλητής που θα μπουν στον πίνακα είναι n , τότε για την γραμμή των προσήμων της f' , θα ορίσουμε $2n - 2$ κόμματα. Το δεύτερο όρισμα της εντολής `\tkzTabInit` είναι το $\{0, 1/e, +\infty\}$, οπότε στην εντολή `\tkzTabLine{}`, θα έχουμε $2 \times 3 - 2 = 4$ κόμματα. Τώρα, για την πρώτη παράγωγο γνωρίζουμε ότι $f'(x) < 0$ για $x < 1/e$ και $f'(x) > 0$ για $x > 1/e$. Οπότε, στην εντολή `\tkzTabLine{}` στις μονές θέσεις βάζουμε d , z , και d , και στις ζυγές $-$ και $+$. Γράφουμε λοιπόν:

```

1   \begin{tikzpicture}
2     \tkzTabInit[espc1=2.5]
3     {\$x$/1, \$f'(x)/1$}
4     {\$0$, \$1/\mathrm{e}$, \$+\infty$}
5     \tkzTabLine{ d , - , z , + , d }
6   \end{tikzpicture}

```

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

Παράδειγμα 6: Απαγορευμένα διαστήματα

Η παράμετρος h μπαίνει σε ζυγή θέση (όπως τα πρόσημα), και με αυτή γραμμοσκιάζουμε ή χρωματίζουμε μια περιοχή στον πίνακα όπου δεν ορίζεται η συνάρτηση. Ας δούμε πώς γίνεται ο πίνακας προσήμων της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ και η πρώτη της παράγωγος $f'(x) = x/\sqrt{x^2 - 4}$ ορίζεται στο $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Οι τιμές του x που θα παρουσιαστούν στον πίνακα είναι οι $\{-\infty, -2, 2, +\infty\}$, δηλαδή $n = 4$, οπότε θα έχουμε $2 \times 4 - 2 = 6$ κόμματα.

Στο διάστημα $[-2, 2]$ δεν ορίζεται η f' , οπότε το διάστημα πρέπει να αφαιρεθεί. Με άλλα λόγια, πρέπει να το γραμμοσκιάσουμε με την παράμετρο h . Θα έχουμε λοιπόν:

```

1 \begin{center}
2 \begin{tikzpicture}
3 \tkzTabInit[espcl=2,lgt=2]
4 {\mathit{x}/1,\mathit{f}'(x)/1}
5 {\mathit{-}\infty,\mathit{-}2,\mathit{2},\mathit{+}\infty}
6 \tkzTabLine{ d , - , z , h , z , + , d }
7 \end{tikzpicture}
8 \end{center}

```

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+

Με την εντολή `\tikzset{h style/.style = {fill=...}}`, μπορούμε να χρωματίσουμε το απαγορευμένο κελί, βάζοντας στη θέση των τριών τελειών όποιο χρώμα επιθυμούμε. Στο Παράδειγμα 1 της σελ. 16, χρωματίζουμε κόκκινο το αποκλεισμένο διάστημα.

Η εντολή `\tkzTabVar`

Για να παραστήσουμε τις μονotonίες (τα γνωστά βελάκια), χρησιμοποιούμε την εντολή `\tkzTabVar{}`, εφοδιάζοντάς την με κάποιες παραμέτρους ανάλογα την περίπτωση. Θα ασχοληθούμε σταδιακά με απλές και θα φτάσουμε σε σύνθετες περιπτώσεις. Ας ερμηνεύσουμε λοιπόν κατά τμήματα τον παρακάτω κώδικα:

```

1 \begin{center}
2 \begin{tikzpicture}
3 [line width=1pt]
4 \tikzset{arrow style/.style =
5 {blue,>->,> = latex',
6 shorten > = 6pt,
7 shorten < = 6pt}}
8 \tkzTabInit[lgt=2,espcl=2]

```

```

9      {\x$/1,$f'(x)$/1,$f(x)$/1.5}%
10     {\$1$, \$2$, \$+\infty$}%
11     \tkzTabLine{d,-,z,+,d}%
12     \tkzTabVar{+/-/, +/,%}
13     \end{tikzpicture}
14     \end{center}

```

Το πρώτο τμήμα του κώδικα (γραμμές 3–7) περιέχει τις παραμέτρους που καθορίζουν τη μορφή των βελών του πίνακα. Η παράμετρος `[line width=1pt]` καθορίζει το πάχος του βέλους. Η εντολή `\tikzset{arrow style/.style = ...}` καθορίζει άλλες παραμέτρους της μορφής του βέλους. Πρώτα καθορίζουμε το χρώμα του βέλους, π.χ. `black` για μαύρο, `blue` για γαλάζιο, `red` για κόκκινο. Για να έχουμε αιχμή στην αρχή και στο πέρας του κάθε βέλους, γράφουμε `>->`. Αν θέλουμε απλά βέλη, γράφουμε `->`. Τα υπόλοιπα, συμβουλεύουμε να τα αντιγράψουμε όπως είναι.

Το δεύτερο τμήμα του κώδικα (γραμμές 8–10) αναφέρεται στα περιεχόμενα της πρώτης γραμμής και στήλης. Η παράμετρος `[lgt=2,esprcl=2]`, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, καθορίζει το πλάτος της πρώτης στήλης (`lgt`) και την απόσταση μεταξύ των τιμών του x (`esprcl`). Το πρώτο όρισμα εντός αγκίστρων `{\x$/1,...}` δίνει τις τιμές που θα μπουν στην πρώτη στήλη. Κάθε τιμή γράφεται συνοδευόμενη με ένα αριθμό, π.χ. `/1`, που καθορίζει το ύψος της γραμμής. Για παράδειγμα, το `\$f(x)/2` μας εξυπηρετεί, γιατί στη γραμμή που αντιστοιχεί στις μεταβολές της f χρειαζόμαστε, λόγω των βελών, μεγαλύτερο χώρο. Το δεύτερο όρισμα εντός αγκίστρων `{\$1$,...}` δίνει τις τιμές της μεταβλητής x που θα μπουν στην πρώτη γραμμή.

Το τρίτο τμήμα του κώδικα (γραμμή 11) εισάγεται με την εντολή `\tkzTabLine` και καθορίζει τα πρόσημα και το στυλ των κάθετων γραμμών του πίνακα, όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα.

Το τελευταίο τμήμα (γραμμή 12) εισάγεται με την εντολή `\tkzTabVar{-/ , +/ , -/}`. Η εντολή αυτή δίνει τη συμπεριφορά των βελών: ανερχόμενα στα διαστήματα που η συνάρτηση είναι αύξουσα και κατερχόμενα όταν είναι φθίνουσα.

Ορίστε το αποτέλεσμα του κώδικα:

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Στη συνέχεια θα δούμε πως έχουμε αρκετές άλλες επιλογές.

Παράδειγμα 7

Ας δούμε πώς φτιάχνουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης $f(x) = e^x/(x+1)$, που έχει πρώτη παράγωγο την $f'(x) = xe^x/(x+1)^2$. Ορίστε ο κώδικας:

```

1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     [line width=1pt]
4     \tikzset{arrow style/.style
5       = {blue,>->,
6         shorten > = 6pt,
7         shorten < = 6pt}}
8     \tkzTabInit[lgt=1.5,espcl=2.5]
9       {$x$/1,$f'(x)$/1,$f(x)$/1.5}%
10      {$-\infty$,$-1$,$0$,$+\infty$}%
11      \tkzTabLine{, -, d, -, z, +,}%
12      \tkzTabVar{+/, -D+/, -/, +D/}%
13   \end{tikzpicture}
14 \end{center}

```

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$				

Παρατηρούμε ότι στην εντολή `\tkzTabLine{d, -, d, -, z, +, }` έχουμε $2 \times 4 - 2 = 6$ κόμματα, γιατί το δεύτερο όρισμα της εντολής `\tkzTabInit` έχει 4 στοιχεία. Στις μονές θέσεις μπαίνουν τα `z`, `t`, `d` και στις ζυγές τα πρόσημα. Στη γραμμή 12, στην εντολή `\tkzTabVar{+/, -D+/, -/, +D/}`, έχουμε τα μισά κόμματα από αυτά της εντολής `\tkzTabLine` και εργαζόμαστε ως εξής: Ξεκινάμε από «πάνω» με το `+/` και πάμε στο σημείο -1 , στο οποίο η συνάρτηση δεν ορίζεται, οπότε βάζουμε το σύμβολο `-D+`, που δηλώνει ότι στο διάστημα $(-\infty, -1)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, στο διάστημα $(-1, 0]$ η συνάρτηση είναι επίσης γνησίως φθίνουσα, στο -1 δεν ορίζεται και έχουμε άλμα από «κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά». Στο διάστημα $(-1, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή `-/` και στο διάστημα $[0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε `+/`, τέλος στο $+\infty$, βάζουμε το σύμβολο `+D`.

Ο Πίνακας 3 δίνει μερικές βασικές επιλογές, ανάλογα με τις μεταβολές μιας συνάρτησης.

Σύμβολο	Ερμηνεία
+D	Δεν ορίζεται αριστερά πάνω
-D	Δεν ορίζεται αριστερά κάτω
D+	Δεν ορίζεται δεξιά πάνω
D-	Δεν ορίζεται δεξιά κάτω
+D-	Ασυνέχεια ή δεν ορίζεται (αριστερά πάνω-δεξιά κάτω)
-D+	Ασυνέχεια ή δεν ορίζεται (αριστερά κάτω-δεξιά πάνω)
+D+	Ασυνέχεια ή δεν ορίζεται (αριστερά πάνω-δεξιά πάνω)
-D-	Ασυνέχεια ή δεν ορίζεται (αριστερά κάτω-δεξιά κάτω)
-V+	Όπως στα D αλλά χωρίς ασυνέχεια
-V-	Όπως στα D αλλά χωρίς ασυνέχεια
+V-	Όπως στα D αλλά χωρίς ασυνέχεια
+V+	Όπως στα D αλλά χωρίς ασυνέχεια
+DH	Ασυνέχεια αριστερά και απαγορευμένο διάστημα πάνω
-DH	Ασυνέχεια αριστερά και απαγορευμένο διάστημα κάτω
+CH	Συνέχεια αριστερά και απαγορευμένο διάστημα πάνω
+CH	Συνέχεια αριστερά και απαγορευμένο διάστημα κάτω

Πίνακας 3: Επιλογές της εντολής \tkzTabVar για την γραφική παράσταση των μεταβολών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 8

Σε τούτο το παράδειγμα, θα προσθέσουμε τα όρια ή τις τιμές (ελάχιστη ή μέγιστη τιμή) στον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης $f(x) = e^x - x^2 + x$ και των παραγώγων της

$$f'(x) = e^x - 2x + 1,$$

$$f''(x) = e^x - 2.$$

```

1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     [line width=1pt]
4     \tikzset{arrow style/.style = {blue, >->,
5       shorten > = 5pt,
6       shorten < = 5pt}}
7     \tkzTabInit[espcl=2.5]
8       {$x$ /1, $f'$ /1,$f''$ /2}
9       {$-\infty$, $\ln 2$, $+\infty$}
10    \tkzTabLine{, -, z, +}
11    \tkzTabVar{ +/$0$ , -/$3-2\ln 2$, +/$+\infty$}
12  \end{tikzpicture}
13 \end{center}
```

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	0	$3 - 2 \ln 2$	$+\infty$

Όπως θα δούμε παρακάτω, μπορούμε με την προσθήκη μιας εντολής να βάλουμε και ενδιάμεσες τιμές.

Πίνακες μεταβολών συναρτήσεων με κοίλα και κυρτά μέρη

Για τις ανάγκες μας στην ενότητα αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε το περιβάλλον `scope`:

```
\begin{scope}
περιεχόμενα...
\end{scope}
```

Στα περιεχόμενα του περιβάλλοντος `scope` βάζουμε, μέσω των εντολών `\draw`, ό,τι χρειάζεται για τη μορφή των κυρτών ή κοίλων βελών. Γενικά, όταν χρησιμοποιούμε το περιβάλλον `scope`, μπορούμε να πειραματιστούμε πάνω στις αναγκαίες ρυθμίσεις, ώστε να πετύχουμε τις κατάλληλες παραστάσεις των βελών. Αυτό που πρέπει να γνωρίζουμε είναι ότι η δομή της εντολής `\draw` αποτελείται από τα σημεία αρχής και προορισμού, δηλαδή: (α, β) το (γ, δ) . Με την κατάλληλη επιλογή των δύο σημείων πετυχαίνουμε να τοποθετήσουμε το βέλος στο αντίστοιχο τετράγωνο του πίνακα. Προσθέτοντας το στοιχείο `[bend left=<γωνία>, looseness=<χαλαρότητα>]` στις διάφορες μορφές του, μορφοποιούμε το βέλος δίνοντάς του την κατάλληλη καμπυλότητα και κατεύθυνση.

Παράδειγμα 9

Ορίστε ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης $f(x) = (\ln x)/x$ με $x \in (0, +\infty)$, και με παραγώγους

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

```

1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     \tkzTabInit[espcl=2]
4       {$x$/1,$f'(x)$/1,$f'(x)$/1,$f(x)$/1.25}%
5       {$0$, $\mathrm{e}$, $\sqrt{\mathrm{e}^3}$, $+\infty$}%
6       \tkzTabLine{, -, z, -, t, +, }
7       \tkzTabLine{, +, z, -, t, -, }
8       \begin{scope}[>-, line width=1pt, >=stealth, blue]
9         \draw (2.5, -4.1) to [bend left=25, looseness=1] (4.4, -3.2);
10        \draw (4.6, -3.2) to [bend right=-25, looseness=1] (6.5, -4.1);
11        \draw (6.7, -3.2) to [bend left=-25, looseness=1] (8.6, -4.1);
12      \end{scope}
13    \end{tikzpicture}
14 \end{center}

```

x	0	e	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	-	+
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$				

Παρατηρούμε ότι η παράμετρος [line width=...] και η εντολή \tikzset{...} αφαιρέθηκαν από τον κώδικα, γιατί εντάχθηκαν στο περιβάλλον scope.

Παράδειγμα 10

Ας δούμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης $f(x) = x^2/(x^2+1)$, με παραγώγους τις

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

```

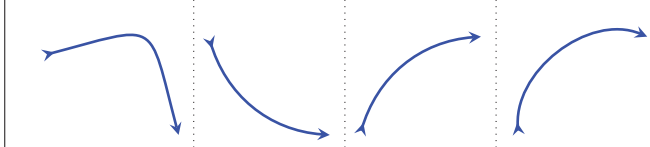
1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     \tkzTabInit[espcl=2]
4       {$x$/1,$f'(x)$/1,$f'(x)$/1,$f(x)$/2}

```

```

5      {\infty$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$,
6      $0$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $+\infty$}
7      \tkzTabLine{, -, t, -, z, +, t, +,}
8      \tkzTabLine{, -, z, +, t, +, z, -,}
9      \draw[dotted] (4.5,-2.0)--(4.5,-5.0);
10     \draw[dotted] (6.5,-2.0)--(6.5,-5.0);
11     \draw[dotted] (8.5,-2.0)--(8.5,-5.0);
12     \begin{scope}[>->, line width=1pt, >=stealth, blue]
13         \draw (2.5,-3.5) to [bend left=45, looseness=2] (5.2,-4.8);
14         \draw (5.8,-3.5) to [bend right=35, looseness=1] (8.3,-4.8);
15         \draw (8.5,-4.8) to [bend left=35, looseness=1] (11.2,-3.5);
16         \draw (11.7,-4.8) to [bend left=60, looseness=1] (14.5,-3.5);
17     \end{scope}
18     \end{tikzpicture}
19 \end{center}

```

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$						

Για όσους είναι εξοικειωμένοι με το πακέτο tikz-pgf [2], η παράμετρος `bend left=<γωνία>` στην ουσία θέτει `out=<γωνία>`, `in=180-<γωνία>`. Με αντίστοιχο τρόπο ορίζεται η παράμετρος `bend right=<γωνία>`· απλά η κάμψη γίνεται από την άλλη πλευρά.

Η παράμετρος `looseness=<αριθμός>` καθορίζει πόσο *χαλαρή* είναι η καμπύλη. Το TikZ υπολογίζει την απόσταση μεταξύ του αρχικού και του τελικού σημείου, την πολλαπλασιάζει επί έναν σταθερό αριθμό και κατόπιν επί τον παράγοντα `<αριθμός>`.

Για να μην αναγκασθείτε να καταφύγετε στο ογκώδες εγχειρίδιο του πακέτου tikz-pgf [2], πειραματιστείτε αλλάζοντας την τιμή της παραμέτρου `looseness`. Προτείνουμε όμως η παράμετρος αυτή να κυμαίνεται από 0 έως 2 το πολύ.

Σε τούτο το παράδειγμα, στις γραμμές 9–11 του κώδικα, έχουμε παρεμβάλει ορισμένες εντολές `\draw[dotted] (a,b)--(c,d)`. Οι εντολές αυτές δημιουργούν διακεκομμένες γραμμές μέχρι το κάτω μέρος της τελευταίας γραμμής. Χωρίς τις εντολές

Όρισμα	Αποτέλεσμα
<i>Αρχή</i>	Η τάξη της αρχής του βέλους
<i>Πέρας</i>	Η τάξη του πέρατος του βέλους
<i>θέση</i>	Δεκαδικός αριθμός μεταξύ του 0 και του 1

Πίνακας 4: Ορίσματα της εντολής `\tkzTabVal`.

αυτές, οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές σταματούν μέχρι τα κελιά που περιέχουν τα πρόσημα (βλ. Παράδειγμα 9, σελ. 26).

Η εντολή `\tkzTabVal`

Με την εντολή `\tkzTabVal` μπορούμε να προσθέτουμε ενδιάμεσες τιμές στα βέλη των μεταβολών μιας συνάρτησης, εκεί που μια συνάρτηση f είναι μονότονη.

Η σύνταξη της εντολής είναι

```
\tkzTabVal[<τοπικές επιλογές>
  {Αρχή}
  {Πέρας}
  {θέση}
  {Τιμή του  $x$ }
  {Εικόνα του  $x$ }
```

Τα ορίσματα της εντολής `\tkzTabVal` εξηγούνται στον Πίνακα 4.

Παράδειγμα 11

Αυτό το παράδειγμα παρουσιάζει τον πίνακα με τις χαρακτηριστικές τιμές της συνάρτησης $f(x) = \ln x$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$. Οι σημαντικές τιμές του x που θα μπουν στον πίνακα είναι οι 0, 1, e και $+\infty$. Η τάξη των τιμών είναι $0 \rightarrow 1, +\infty \rightarrow 2$. Η εντολή `\tkzTabVal` πρέπει να χρησιμοποιηθεί δύο φορές:

```
\tkzTabVal{1}{2}{0,33}{1}{0}
\tkzTabVal{1}{2}{0,66}{e}{1}
```

Με την πρώτη χρήση της εντολής `\tkzTabVal`, δηλώνουμε ότι ανάμεσα στις τιμές του x με τάξη 1 και 2 (δηλαδή το 0 και το $+\infty$) στη θέση 0,33 η τιμή του $x = 1$ έχει ως εικόνα το 0. Αντίστοιχα, με τη δεύτερη χρήση της ίδιας εντολής, δηλώνουμε πως στη θέση 0,66 η τιμή του $x = e$ έχει εικόνα το 1.

Ο πλήρης κώδικας για τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, με πρώτη παράγωγο $f'(x) = 1/x$, έχει λοιπόν ως εξής:

```

1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     \tkzTabInit[lgt=1.5,espcl=8]
4       {\$x\$/1,\$1\slash x\$/1,\$\\n x\$/2}
5       {\$0\$, \$+\infty\$}%
6     \tkzTabLine{d,+,}%
7     \tkzTabVar[color=red]{D-/\$-\infty\$, +/\$+\infty\$}
8     \tkzTabVal{1}{2}{0.33}{1}{0}
9     \tkzTabVal{1}{2}{0.66}{e}{1}
10  \end{tikzpicture}
11 \end{center}

```

Προσέξτε πως στη γραμμή 4, αντί για $\$1/x\$,$ βάλαμε $\$1\slash x\$.$ Αυτό έγινε γιατί για το πρώτο όρισμα της εντολής `\tkzTabInit`, η πλάγια (/) έχει ιδιαίτερη σημασία. Όπως εξηγήσαμε προηγουμένως (σελ. 18), η πλάγια διαχωρίζει τα στοιχεία και τα πλάτη των γραμμών του πίνακα. Αν βάλουμε $\$1/x\$,$ τότε το $\text{\LaTeX}$ θα βρει λάθη στον κώδικα και θα κολλήσει. Ορίστε το αποτέλεσμα του παραπάνω κώδικα:

x	0	1	e	$+\infty$
$1/x$				+
$\ln x$				$+\infty$

Μερικά βήματα παραπέρα

Στα επόμενα παραδείγματα, θα παρουσιάσουμε πίνακες μεταβολών συναρτήσεων για διάφορες κάπως πιο δύσκολες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 12

Παρακάτω δίνεται ο πίνακας μεταβολών μιας τυχαίας συνάρτησης $f(x)$ και της πρώτης της παραγώγου $f'(x)$.

```

1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     [line width=1pt]
4     \tikzset{arrow style/.style =

```

```

5      {blue,>->,> = latex',
6      shorten > = 6pt,
7      shorten < = 6pt}}
8      \tkzTabInit[lgt=2,espc1=2]
9      {$x$/1,
10     Μεταβολή\ της $f'$/1.5,
11     Πρόσημο\ της $f'$/1.5,
12     Μεταβολή \ της $f$/1.5}
13     {$-\infty$, $\alpha$, $x_0$, $\beta$, $+\infty$}
14     \tkzTabVar{-DH/, -/, R/, +DH/}
15     \tkzTabLine{d, h, d, -, z, +, d, h, }
16     \tkzTabVar{-DH/, +/, -/, +DH/}
17     \end{tikzpicture}
18 \end{center}

```

x	$-\infty$	α	x_0	β	$+\infty$
Μεταβολή της f'					
Πρόσημο της f'			- 0 +		
Μεταβολή της f					

Παράδειγμα 13

Στο παρακάτω παράδειγμα, χρωματίζουμε τον πίνακα μεταβολών μιας τυχαίας συνάρτησης. Πρώτα-πρώτα, η παράμετρος `color` στην εντολή `\tkzTabInit` σημαίνει πως ο πίνακας θα είναι χρωματισμένος. Κατόπιν ορίζουμε τα χρώματα

- `colorL`, για το χρώμα της πρώτης γραμμής,
- `colorC`, για το χρώμα της πρώτης στήλης στα αριστερά,
- `colorV`, για το χρώμα της γραμμής με τις τιμές του x , και
- `colorT`, για το χρώμα στις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα.

```

1 \begin{center}

```

```

2 \begin{tikzpicture}
3   \tkzTabInit[espc1=2,
4     color,
5     colorL=yellow!20,
6     colorC=orange!20,
7     colorV=green!20,
8     colorT=gray!20]
9     {\$x\$/0.8,\$f'\{x\}\$/0.8,\$f'(x)\$/1.6,\$f(x)\$/1.6}
10    {\$0\$ , \$1\$ , \$+\infty\$}
11    \tkzTabLine{d,+ ,z,- , }
12    \tkzTabVar{D- / \$1\$ ,+/\mathrm{e}\$/ , -/\$0\$/}
13    \tkzTabVar{D- / \$-\infty\$ , R/\$0\$/ ,+/\$+8\$/}
14  \end{tikzpicture}
15 \end{center}

```

x	0	1	$+\infty$
$f''x$		$+$	$-$
$f'(x)$		e	
$f(x)$			$+8$

Παράδειγμα 14

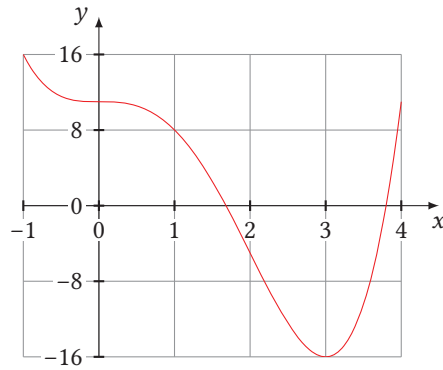
Μια πιο περίπλοκη περίπτωση πίνακα, την αλιεύσαμε από το `tex.stackexchange.com` [3]. Στην περίπτωση αυτή, επιθυμούμε να ενώσουμε ορισμένες τιμές της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$ με καμπύλα τόξα.

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 1, η συνάρτηση παρουσιάζει ένα ελάχιστο και δύο σημεία καμπής. Για να βάλουμε τιμές και καμπύλα βέλη στον πίνακα μεταβολών της $f(x)$, πρέπει να ορίσουμε κάποια σημεία-κόμβους (node στην ορολογία του tikz) στη γραμμή της συνάρτησης. Και για να ξέρουμε πού ακριβώς θα βάλουμε αυτούς τους κόμβους, γράφουμε τον κώδικα, προς στιγμήν χωρίς τις καμπύλες που συνδέουν τις τιμές της $f(x)$, και χρησιμοποιούμε την παράμετρο `help` στην εντολή `\tkzTabInit`:

```

\begin{center}
\begin{tikzpicture}
\tkzTabInit[espc1=2,help]
{\$x\$/0.8,\$f'(x)\$/0.8,\$f''(x)\$/0.8,\$f(x)\$/3.2}

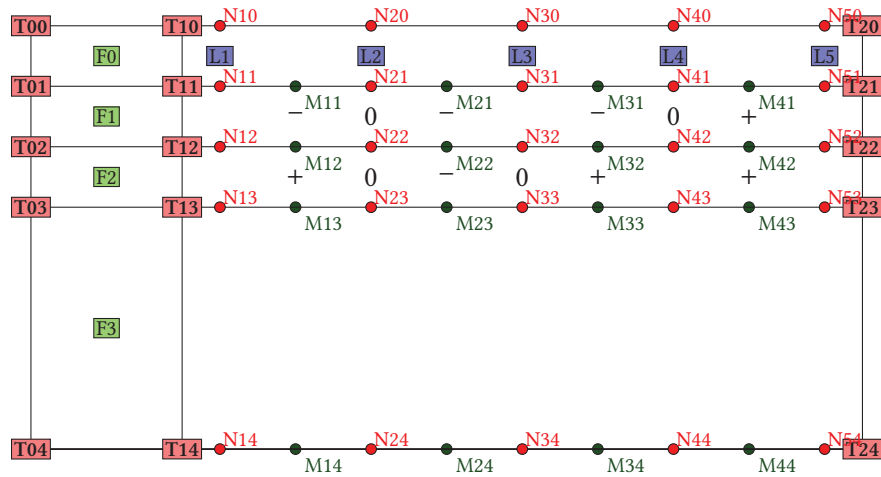
```



Εικόνα 1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$.

```
{\$-\infty$, \$0$, \$2$, \$3$, \$+\infty$}
\tkzTabLine{,-,0,-, -,0,+, }
\tkzTabLine{+,0,-,0,+, ,+, }
\end{tikzpicture}
\end{center}
```

Η εντολή `\tkzTabInit` με την παράμετρο `help` φανερώνει όλους τους κρυφούς κόμβους του πίνακα, τους κόμβους δηλαδή που δημιουργεί το `tkz-tab` στο εσωτερικό του.



Έτσι τώρα μπορούμε να συμπληρώσουμε τους δικούς μας κόμβους $n1, \dots, n5$, με τις τιμές της $f(x)$:

```
\node [below] (n1) at (N13){\scriptsize$+\infty$};
...
\node [below] (n5) at (N53){\scriptsize$+\infty$};
```

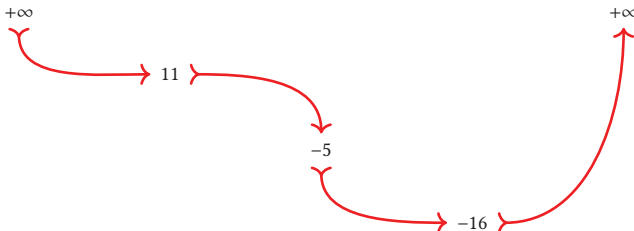
Και κατόπιν μπορούμε να σχεδιάσουμε τα καμπύλα βέλη που ενώνουν τους κόμβους $n(1), \dots, n(5)$:

```
\draw[>->] (n1) to [out=-90,in=180] (n2);
...
\draw[>->] (n4) to [out=0,in=-90] (n5);
```

Ορίστε ο πλήρης κώδικας, στον οποίο προσθέσαμε μερικές παραμέτρους για τη μορφή των γραμμών και των βελών:

```
1 \begin{center}
2   \begin{tikzpicture}
3     [line width=1pt]
4     \tikzset{arrow style/.style =
5       {red,>->,> = latex',
6         shorten > = 6pt,
7         shorten < = 6pt}}
8     \tkzTabInit[espcl=2,help]
9       {$x$/0.8,$f'(x)$/0.8,$f''(x)$/0.8,$f(x)$/3.2}
10      {$-\infty$,$0$,$2$,$3$,$+\infty$}
11      \tkzTabLine{,-,0,-, -,0,+, }
12      \tkzTabLine{+,0,-,0,+, ,+, }
13      \node [below] (n1) at (N13){\scriptsize$+\infty$};
14      \node [below=0.8cm] (n2) at (N23){\scriptsize$11$};
15      \node [below=1.8cm] (n3) at (N33){\scriptsize$-5$};
16      \node [above] (n4) at (N44){\scriptsize$-16$};
17      \node [below] (n5) at (N53){\scriptsize$+\infty$};
18      \draw[red,>->] (n1) to [out=-90,in=180] (n2);
19      \draw[red,>->] (n2) to [out=0,in=90] (n3);
20      \draw[red,>->] (n3) to [out=-90,in=180] (n4);
21      \draw[red,>->] (n4) to [out=0,in=-90] (n5);
22    \end{tikzpicture}
23  \end{center}
```

Και ορίστε το αποτέλεσμα:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	−	0	−	−	0	+
$f''(x)$	+	0	−	0	+	+
$f(x)$						

Επίλογος

Εννοείται ότι οι πίνακες μπορούν να βελτιωθούν ως προς την ποιότητα. Αυτό που θέλαμε να επιτύχουμε με την εργασία αυτήν είναι μια αρχική παρουσίαση του πακέτου *tkz-tab*. Ελπίζουμε να κεντρίσαμε το ενδιαφέρον του αναγνώστη, για να εμβαθύνει ο ίδιος στη δημιουργία όμορφων πινάκων μεταβολών συναρτήσεων.

Ευχαριστίες

Οφείλω να ευχαριστήσω τον Δημήτρη Φιλίππου για τη βοήθειά του και τις εύστοχες επισημάνσεις του για την ολοκλήρωση αυτού του άρθρου.

Αναφορές

- [1] A. Matthes, “*tkz-tab – Tables of signs and variations using PGF/TikZ.*” Version 1.4d, Sept. 19, 2018. URL: <https://github.com/tkz-sty/tkz-tab/releases>. Ανακτήθηκε στις 15 Οκτωβρίου 2018.
- [2] T. Tantau, “*pgf – Create PostScript and graphics in T_EX.*” Version 2.0, Feb. 22, 2018. URL: <https://www.ctan.org/pkg/pgf>. Ανακτήθηκε στις 15 Οκτωβρίου 2018.
- [3] A. Matthes, Answer to question “Second Derivative.” Feb. 25, 2014. URL: <https://tex.stackexchange.com/questions/162273/second-derivative/336449>. Ανακτήθηκε στις 15 Οκτωβρίου 2018.